

2.1 Банаховы пространства, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора, полнота пространства линейных ограниченных операторов

Полное лнй нормир. пр-во наз-ся **банаховым пр-вом**

$\exists$ задан оп-р $\Phi: X \rightarrow Y, \Phi x = y$.
 Оп-р $A: X \rightarrow Y$ наз-ся **линейным**, if $\forall x_1, x_2 \in X$
 $\Rightarrow A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$

Оп-р $A: X \rightarrow Y$ наз-ся **оп.**, if он $\forall$ оп. лн-во переводит в оп.

Оп-р $A: X \rightarrow Y$ наз-ся **непр.** в т. x , if $\forall x_n \rightarrow x$
 $\Rightarrow A x_n \rightarrow A x$

Лемма If A — лнй, $A: X \rightarrow Y$, A непр. в т. $z \in X$, то A непр. в $\forall x \in X$

▲ $\forall x \in X, \forall x_n \rightarrow x: z + x_n - x \rightarrow z, A(z + x_n - x) \rightarrow A z, A z + A x_n - A x \rightarrow A z \Rightarrow A x_n \rightarrow A x$ ■

IF A — оп., $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A x\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\|}} \frac{\|A x\|}{\|x\|}$

▲ $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A x\| \leq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \neq 0}} \|A x\| \cdot \frac{1}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \|x\|}} \|A \frac{x}{\|x\|}\| =$

$= \sup_{\|z\| \leq 1} \|A z\| \leq \sup_{\|z\| \leq 1} \|A z\| = \|A\|$ ■

Сл. If A — оп., то $\|A x\| \leq \|A\| \|x\|$

$\mathcal{L}(X, Y)$ — **пр-во лнй. опер-в** из X в Y

$\forall$ лнй оп-р $A: X \rightarrow Y$ непр $\Leftrightarrow$ оп.

⊕ A ограничен; g -ли непр-тв. Пусть $x \in X$, $x_n \rightarrow x$, пока-
 жем, что $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0$

⊕ A непрерывен; g -ли ограничен. От противного: пусть
 он не ограничен, т.е. $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = +\infty \Rightarrow \exists x_n, \|x_n\| \leq 1$

$\|Ax_n\| \rightarrow +\infty$. Введем $z_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|Ax_n\|}}$, тогда $z_n \rightarrow 0$.

$\|Az_n\| = \frac{1}{\sqrt{\|Ax_n\|}}$ $\|Ax_n\| = \sqrt{\|Ax_n\|} \rightarrow \infty$ (!) Ч.Т.Д.

ли. норм.

⚡ If Y — банахово, то пр-во $L(X, Y)$ — полное

Пусть $A_n \in L(X, Y)$, A_n — фундаментальна: $\|A_n - A_m\| \rightarrow 0$

$\forall x \in X$, $A_n x$ фундаментальна: $\|A_n x - A_m x\| \leq$
 $\leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0$. Т.к. Y — полное, то $\exists y \in Y$:

$A_n x \rightarrow y$. Определим оператор A как $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$.

Очевидно, что он линейн. $\forall \varepsilon > 0 \exists N$, т.е. $\forall n \geq N \forall m \geq n \|A_n - A_m\| < \varepsilon$

$\|A_n x - A_{n+m} x\| \leq \|A_n - A_{n+m}\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$; $\forall x, \forall n \geq N$
 уменьшим $m \rightarrow \infty$.

$\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \cdot \|x\| \quad \forall x \Rightarrow \|A_n - A\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow A$ сур, и $A_n \rightarrow A$. Ч.Т.Д. ■